

Лекция 20-21. Долгосрочный экономический рост. Модель Солоу.

1. Эмпирические факты экономического роста.

Рассмотрим основные тенденции, отмеченные Калдором в его статье, посвященной накоплению капитала и экономическому росту (1961г.):

- ⇒ отношение капитала к занятости (фондовооруженность) и отношение выпуска к занятости (производительность труда) растут,
- ⇒ отношение выпуска к капиталу демонстрировало отсутствие значимого тренда, то есть, выпуск и капитал изменялись примерно одинаковыми темпами,
- ⇒ реальная заработная плата демонстрирует устойчивую тенденцию к росту,
- ⇒ реальная ставка процента не имеет определенного тренда, хотя и подвержена непрерывным колебаниям.

Эмпирические исследования также показывают, что темпы роста производительности труда значительно различаются между странами.

2. Источники экономического роста

Рассмотрим выпуск Y , как функцию от запаса капитала (K), используемых трудовых ресурсов (L), и уровня технологии (A) с нейтральным техническим прогрессом:

$$(1) \quad Y = AF(K, L),$$

Если функция F обладает постоянной отдачей от масштаба, то

$$(2) \quad \Delta Y = A \cdot (F'_K \Delta K + F'_L \Delta L) + \Delta A \cdot F(K, L).$$

Поделив обе части соотношения на Y и, учитывая, что $Y = AF(K, L)$, получим:

$$(3) \quad \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{F'_K}{F(K, L)} \cdot \frac{K \cdot \Delta K}{K} + \frac{F'_L}{F(K, L)} \cdot \frac{L \cdot \Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}.$$

В условиях совершенной конкуренции имеем: $F'_L = w/P$ и $F'_K = r/P$. Следовательно, $F'_K K/F$ равняется доле дохода капитала в ВВП (s_K), а $F'_L L/F$ равняется доле оплаты труда в выпуске (s_L), причем для функции с постоянной отдачей от масштаба эти доли в сумме равны единице: $s_L + s_K = 1$. Теперь мы можем переписать равенство (3) следующим образом:

$$(4) \quad \frac{\Delta Y}{Y} = s_K \cdot \frac{\Delta K}{K} + (1 - s_K) \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta A}{A}.$$

Вывод. Темп роста выпуска ($\Delta Y / Y$) зависит от:

⇒ –накопления капитала, причем вклад капитала в рост ВВП пропорционален доле дохода капитала в выпуске;

⇒ темпа роста занятости, вклад занятости также пропорционален доли оплаты труда в ВВП;

⇒ темпа технического прогресса.

Если под экономическим ростом понимать изменение выпуска на душу населения, то темп роста подушевого выпуска равен:

$$(5) \quad \frac{\Delta(Y/L)}{Y/L} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L} = s_K \cdot \left(\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} \right) + \frac{\Delta A}{A} = s_K \cdot \frac{\Delta(K/L)}{K/L} + \frac{\Delta A}{A}.$$

Вывод. Темп роста подушевого выпуска определяется темпом роста подушевого капитала и темпом технологического прогресса.

Замечание. В отличие от темпа роста подушевого выпуска и капитала, темп технологического прогресса практически невозможно измерить. Однако, используя соотношение (5) мы можем определить темп технологического прогресса по остаточному принципу:

$$(6) \quad \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta(Y/L)}{Y/L} - s_K \cdot \frac{\Delta(K/L)}{K/L}.$$

Этот остаток получил название *остаток Солоу*.

3. Базовая модель Солоу (без технологического прогресса).

Предпосылки:

⇒ два фактора производства: труд и капитал, а выпуск в каждый момент времени t определяется производственной функцией: $Y_t = F(K_t, L_t)$ где F -производственная функция с постоянной отдачей от масштаба,

⇒ функция F возрастает по все аргументам, вогнута и удовлетворяет следующим техническим условиям: $\lim_{K \rightarrow 0} F'_K = \lim_{L \rightarrow 0} F'_L = \infty$ и $\lim_{K \rightarrow \infty} F'_K = \lim_{L \rightarrow \infty} F'_L = 0$,

⇒ закрытая экономика без государственного сектора: произведенная в момент t продукция может быть использована либо на потребление (C_t), либо на инвестиции (I_t):

$$(7) \quad Y_t = C_t + I_t,$$

⇒ сбережения являются некой фиксированной долей дохода:

$$(8) \quad S_t = sY_t, \text{ где } 0 \leq s \leq 1,$$

⇒ норма амортизации капитала δ ($0 \leq \delta \leq 1$) постоянна,

⇒ население равно трудовым ресурсам и растет с постоянным темпом n : $L_t = L_0 e^{nt}$ и в экономике имеет место полная занятость.

В рассматриваемой экономике доход совпадает с личным располагаемым доходом и расходуется на потребление и сбережения: $Y_t = C_t + S_t$. В равновесии с учетом (7) и (8) имеем:

$$(9) \quad I_t = S_t = sY_t.$$

Валовые инвестиции равны: $I_t = \dot{K} + \delta K_t$, где \dot{K} - чистый прирост капитала. (Точкой сверху обозначена производная по времени). Подставляя выражение для инвестиций в (9), получаем:

$$(10) \quad \dot{K} + \delta K_t = sF(K_t, L_t)$$

Поделим обе части уравнения (10) на L_t и с учетом однородности первой степени функции F получим:

$$(11) \quad \frac{\dot{K}}{L_t} + \delta \frac{K_t}{L_t} = s \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = sF\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right).$$

Перейдем от абсолютных величин к величинам на одного рабочего, обозначив $k \equiv K/L$, $f(k) \equiv F(K/L, 1)$. Тогда $\dot{k} = \frac{dK_t/L_t}{dt} = \frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2} = \frac{\dot{K}}{L} - \frac{K}{L} \cdot \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{L} - kn$, откуда

находим $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + kn$ и подставляем в (11):

$$(12) \quad \dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k.$$

Дифференциальное уравнение (12) называют *уравнением накопления капитала*.
Вопрос: проинтерпретируйте уравнение (12).

4. Стационарное состояние.

Определение. Под *стационарным состоянием* в рассматриваемой модели будем понимать ситуацию в которой капитал на одного рабочего является неизменным: $\dot{k} = 0$. Стационарный запас подушевого капитала k^* определяется из условия:

$$(13) \quad sf(k^*) = (n + \delta)k^*.$$

Вопрос: каковы темпы роста запаса капитала, выпуска и потребления в стационарном состоянии?

Стационарное состояние в модели Солоу можно изобразить графически (см. Рис.1).

Точка пересечения кривой подушевых сбережений $sf(k)$ и кривой необходимых инвестиций $(n+\delta)k$ определяет стационарный подушевой капитал k^* . Заметим, что стационарное состояние при положительном подушевом капитале существует, поскольку функция $f(k)$ вогнута, выходит из нуля и удовлетворяет следующим условиям: $\lim_{k \rightarrow 0} sf(k) = \infty > n + \delta$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} sf(k) = 0 < n + \delta$.

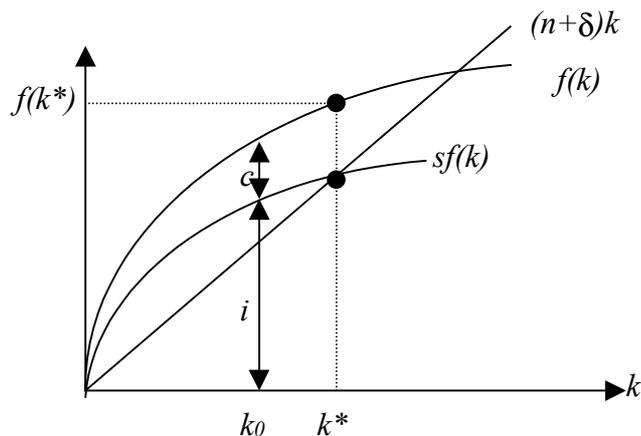


Рисунок 1. Стационарное состояние в модели Солоу.

5. Золотое правило накопления капитала.

При какой норме сбережения стационарное потребление c будет максимальным?

Найдем стационарное подушевое потребление как разницу между доходом и сбережениями: $c^* = f(k^*(s)) - sf(k^*(s))$. Учитывая, что $sf(k^*) = (n + \delta)k^*$, получим:

$$(14) \quad c^* = f(k^*(s)) - (n + \delta)k^*(s).$$

Макимизируя (14) по s , находим: $[f'(k^*) - (n + \delta)] \cdot dk^* / ds = 0$. Поскольку $dk^* / ds > 0$, то

$$(15) \quad f'(k^g) = n + \delta.$$

Условие (15), определяющее стационарный уровень k , максимизирующий стационарное потребление c , называют *золотым правилом накопления капитала*. *Вопрос: приведите экономическую интерпретацию «золотого правила».*

Проиллюстрируем золотое правило графически. Норма сбережения s^g на рисунке 2 соответствует золотому правилу, поскольку стационарный капитал k^g таков, что наклон $f(k)$ в точке k^g равен $(n + \delta)$. Как видно из рисунка при увеличении нормы сбережения до s^1 или снижении до s^2 стационарное потребление c по сравнению с c^g падает: $c^g > c^1$ и $c^g > c^2$.

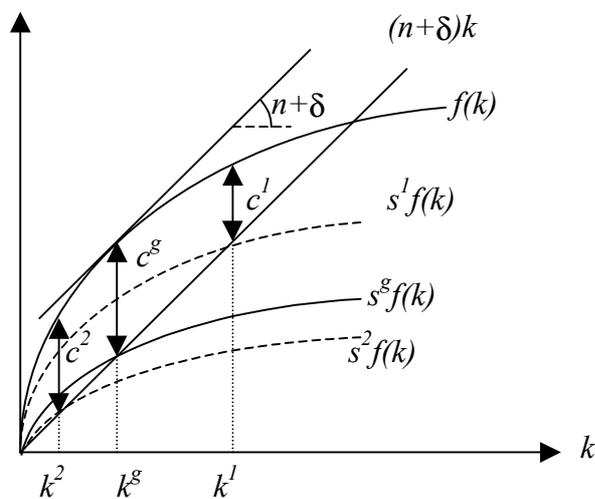


Рисунок 2. Золотое правило накопления капитала.

Вывод. Если норма сбережения в экономике превышает s^g и, соответственно стационарный подушевой капитал выше, чем при золотом правиле, то распределение ресурсов в такой экономике динамически неэффективно. Снизив норму сбережения до s^g , можно было бы достигнуть не только повышения подушевого потребления в долгосрочном периоде, т.е. роста стационарного c , но и в процессе перехода от стационарного подушевого капитала k^1 до k^g подушевое потребление было бы выше, чем в исходном состоянии.

6. Экономический рост: долгосрочная динамика и переходный период.

Долгосрочный экономический рост: поскольку в стационарном состоянии подушевой капитал постоянен, то и подушевой выпуск также будет постоянен, то есть, долгосрочный экономический рост не зависит от экзогенных параметров.

Переходный период: экзогенные параметры влияют на подушевой выпуск в переходный период, то есть, при движении к стационарному состоянию.

Поделив обе части уравнения (12) на k , найдем уравнение для темпа роста подушевого капитала:

$$(16) \quad \dot{k} / k = sf(k) / k - (n + \delta).$$

Изобразим динамику модели Солоу, описываемую уравнением (16) графически (см. Рис.4). Заметим, что $sf(k)/k$ убывает по k . Расстояние между кривыми $sf(k)/k$ и $(n + \delta)$ по вертикали равно темпу роста подушевого капитала. В точке пересечения кривых $sf(k)/k$ и $(n + \delta)$ темп роста подушевого капитала равен нулю, то есть мы находимся в стационарном состоянии k^* . Справа от k^* темп роста подушевого капитала отрицателен, а слева - положителен.

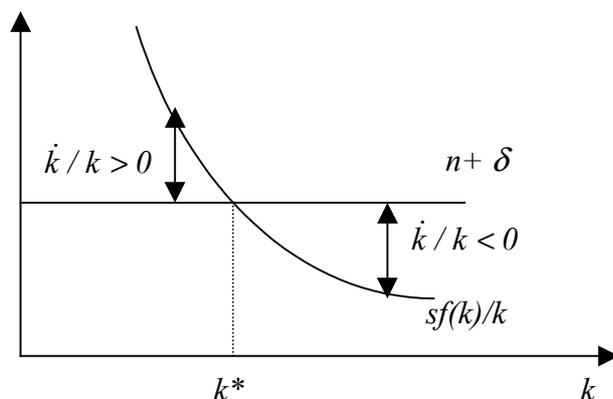


Рисунок 4. Динамика темпа роста подушевого капитала в модели Солоу.

Заметим, что динамика темпа роста подушевого выпуска аналогична динамике темпа роста подушевого капитала, поскольку

$$\dot{y} / y = f'(k) \cdot \dot{k} / f(k) = [kf'(k) / f(k)] \cdot \dot{k} / k = s_k \cdot \dot{k} / k.$$

Выводы: при движении к стационарному состоянию темпа роста подушевого выпуска тем больше, чем больше норма сбережения и чем меньше норма амортизации и темп роста населения.

7. Сравнительная статика модели Солоу.

1. Изменение нормы сбережения.

При повышении нормы сбережения, то график функции $sf(k)/k$ сдвинется вверх и стационарный капитал возрастет, как показано на рисунке 5.

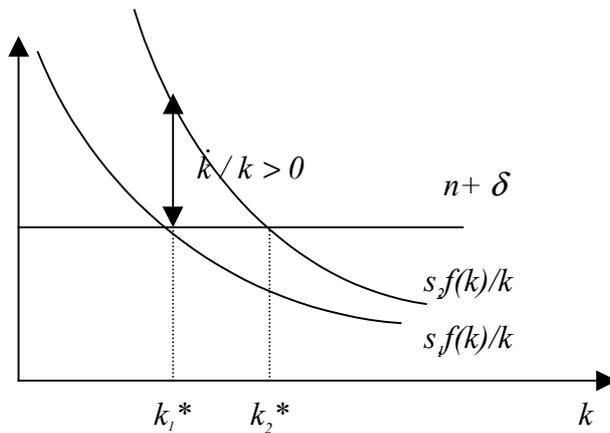


Рисунок 5. Изменение подушевого капитала в результате повышения нормы сбережения от s_1 до s_2 .

Переход в новое стационарное состояние:

- ⇒ за повышением нормы сбережения следует скачок в темпе роста подушевого капитала (капитал растет быстрее, чем население),
- ⇒ по мере увеличения подушевого капитала расстояние между кривыми $sf(k)/k$ и $(n + \delta)$ сокращается и устремляется к нулю (по мере приближения к новому стационарному состоянию темпы роста K и L вновь сближаются).

2. Изменение нормы амортизации.

Переход в новое стационарное состояние при снижении нормы амортизации:

- ⇒ резкий всплеск инвестиций и скачок в темпе роста капитала,
- ⇒ по мере увеличения подушевого капитала инвестиции падают до уровня необходимых инвестиций.

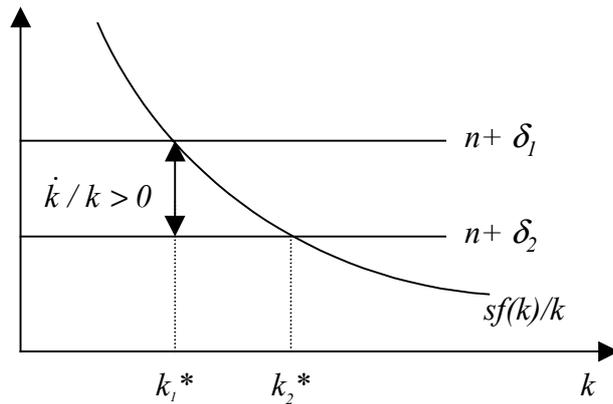


Рисунок 6. Изменение подушевого капитала в результате снижения нормы амортизации с уровня δ_1 до уровня δ_2

3. Изменение темпов роста населения.

Переход в новое стационарное состояние при увеличении темпов роста населения:

⇒ темп роста выпуска резко падает (рис. 7),

⇒ темп роста выпуска растет и в итоге превышает исходный уровень.

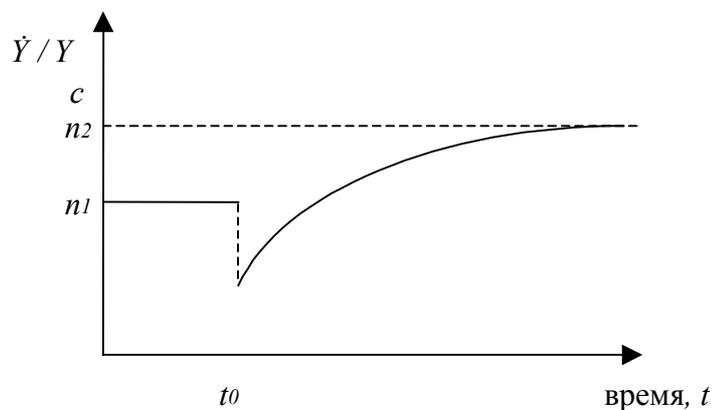


Рисунок 7. Динамика темпа роста выпуска при увеличении темпа роста населения с n_1 до n_2 .

8. Абсолютная и относительная конвергенция.

Согласно модели Солоу, если мы рассмотрим группу стран с одинаковыми нормами сбережения, нормами амортизации, темпами роста населения и одинаковыми технологиями, то для них стационарный подушевой капитал также будет одинаков.

Если при этом, в настоящий момент эти страны имеют различные стартовые позиции, то есть, различаются по величине текущего подушевого капитала, то это

означает, что страны с более низким начальным k будут иметь более высокие темпы роста k , поскольку:

$$(17) \quad \frac{\partial(\dot{k}/k)}{\partial k} = \frac{s \cdot [f'(k) - f(k)/k]}{k} < 0.$$

Вывод: страны с более низким подушевым капиталом в силу более высоких темпов роста будут догонять страны с более высоким подушевым капиталом, то есть будет иметь место *абсолютная конвергенция*.

Однако эмпирические данные не подтверждают этой гипотезы.

Страны существенным образом различаются по темпам роста населения и технологиям. В связи с этим каждая страна будет характеризоваться своим, отличным от других стран, уровнем стационарного подушевого капитала и потому уместнее рассматривать *относительную конвергенцию*.

Вывод: относительная конвергенция предполагает, что экономика растет тем быстрее, чем дальше находится от своего стационарного состояния.

9. Модель Солоу с трудосберегающим техническим прогрессом.

Предполагая, что уровень технологии остается неизменным, мы получили, что все подушевые переменные в долгосрочном периоде оказались неизменными. Подобные выводы крайне нереалистичны и противоречат эмпирическим фактам экономического роста.

Вопрос: какие именно эмпирические факты экономического роста не нашли отражения в модели Солоу без технического прогресса?

Дополнительные предпосылки:

⇒ Производственная функция с трудосберегающим техническим прогрессом:

$F(K_t, A_t L_t)$, которая обладает постоянной отдачей от масштаба при данной величине A ,

⇒ постоянный темп технического прогресса: $\dot{A}/A \equiv g$.

При трудосберегающем техническом прогрессе с течением времени каждый рабочий становится эффективнее. Перейдем от абсолютных показателей в уравнении (10) к показателям на одну эффективную единицу труда, поделив обе части этого уравнения на $A_t L_t$:

$$(18) \quad \frac{\dot{K}}{A_t L_t} + \delta \frac{K_t}{A_t L_t} = s \frac{F(K_t, A_t L_t)}{A_t L_t} = sF\left(\frac{K_t}{A_t L_t}, I\right).$$

Обозначим через $k_A \equiv K/AL$ и $y_A = Y/AL$, тогда:

$$\dot{k}_A = \frac{d(K_t / A_t L_t)}{dt} = \frac{AL\dot{K} - K\dot{A}L - K\dot{A}L}{(AL)^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{K}}{AL} - k_A(n+g),$$

откуда находим $\frac{\dot{K}}{AL} = \dot{k}_A + k_A(n+g)$ и подставляем в (18):

$$(19) \quad \dot{k}_A = sf(k_A) - (n + \delta + g)k_A.$$

Уравнение (19) описывает *накопление капитала при наличии трудосберегающего технического прогресса*.

Определение. Стационарным состоянием в рассматриваемой модели будем называть состояние, в котором капитал на единицу эффективного труда постоянен: $\dot{k}_A = 0$, тогда стационарный капитал k_A^* определяется из условия: $sf(k_A^*) = (n + \delta + g)k_A^*$.

Выводы: В стационарном состоянии подушевой капитал и подушевой выпуск растут с постоянным темпом, равным темпу технического прогресса g . При этом запас капитала и уровень выпуска (K и Y) в стационарном состоянии растут с темпом $(n+g)$. Другие экзогенные параметры (норма сбережения, норма амортизации, производственная функция) влияют лишь на траекторию перехода к стационарному состоянию и стационарный капитал, но не влияют на темпы роста в стационарном состоянии.

Объяснение эмпирических закономерностей экономического роста.

⇒ подушевой капитал и выпуск в долгосрочном периоде не являются постоянными, а растут с постоянным темпом,

⇒ в стационарном состоянии отдача на капитал является постоянной в силу неизменности k_A^* :

$$F'_K(K, AL) = \frac{\partial(AL \cdot F(K/AL, I))}{\partial K} = AL \cdot \frac{\partial F(K/AL, I)}{\partial K/AL} \cdot \frac{1}{AL} = f'(k_A)$$

⇒ отдача на труд в стационарном состоянии растет с постоянным темпом:

$$F'_K(K, AL) = \frac{\partial(AL \cdot F(K/AL, 1))}{\partial K} = AF(K/AL, 1) + AL \cdot \frac{\partial F(K/AL, 1)}{\partial K/AL} \cdot \left(-\frac{K}{AL^2}\right) =$$

$$= A \cdot (f(k_A) - k_A f'(k_A)),$$

учитывая, что k_A в стационарном состоянии неизменен, а параметр A растет с постоянным темпом g , то и предельный продукт труда будет расти с постоянным темпом, равным g .

10. Недостатки модели Солоу.

- ⇒ Не объясняет, почему в действительности не наблюдается конвергенции между богатыми и бедными странами.
- ⇒ Согласно модели Солоу различия в уровнях подушевого дохода между богатыми и бедными странами являются результатом различий в уровнях подушевого капитала. Это означает, что предельный продукт капитала должен быть выше в бедной стране по сравнению с богатой, что для многих бедных стран не соответствует действительности (если бы это было так, то мы должны были бы наблюдать значительный приток капиталов в бедные страны).
- ⇒ Модель Солоу объясняет рост ВВП экзогенными параметрами, а именно экзогенным темпом технического прогресса, при этом причина технического прогресса остается необъясненной.

11. Модели эндогенного экономического роста

В модели Солоу экономический рост экзогенен (равен экзогенному темпу технического прогресса). Остается непонятным, каким образом можно стимулировать экономический рост.

В 1980-х годах появились новые теории экономического роста, предложившие в качестве объясняющих переменных эндогенные переменные модели.

Основные отличия моделей эндогенного роста состоят в отказе от предпосылки об убывании предельной производительности капитала, которая предполагалась, в частности в модели Солоу. Эта модификация позволяет предельной отдаче в бедной стране быть не меньше, чем в богатой.

Пример: "AK" модель. При постоянной предельной производительности капитала производственная функция, а, значит, и функция сбережений будет линейна по капиталу. Рассмотрим производственную функцию с трудосберегающим техническим прогрессом: $Y = F(K, AN)$. Будем считать, что уровень технологии не задается экзогенно, а пропорционален подушевому капиталу: $A = \alpha K / L = \alpha k$, где α - предельный продукт капитала.

В равновесии подушевые сбережения равны подушевым инвестициям: $sy = i = \Delta k + (n + \delta)k$. Поделив на подушевой капитал, получим:

$$(20) \quad \Delta k / k = sy / k - (n + \delta).$$

Найдем выражение для y / k , поделив выпуск на капитал: $y / k = F(K, AN) / K = F(1, AN / K) = F(1, \alpha)$. Таким образом, отношение выпуска к капиталу (производительность капитала) является константой, равной $F(1, \alpha)$. Обозначим эту константу через a и подставим в (20): $\Delta k / k = as - (n + \delta)$.

Вывод: в данной модели при эндогенном темпе роста технического прогресса темп роста подушевого выпуска положительно зависит от нормы сбережения и производительности капитала и отрицательно от нормы амортизации и темпа роста населения.

Таким образом, эндогенные теории экономического роста оставляют пространство для использования экономической политики в целях ускорения экономического роста.

Экономическая политика в отношении долгосрочного экономического роста.

- ⇒ стимулирование сбережений (например, посредством снижения налогов на доходы по ценным бумагам);
- ⇒ стимулирование инвестиции напрямую, например, через инвестиционные налоговые кредиты;
- ⇒ согласно моделям эндогенного роста человеческий капитал посредством положительного внешнего эффекта стимулирует экономический рост: государству следует проводить политику, направленную на стимулирование образования, исследований и разработок посредством субсидирования этих областей напрямую или посредством поощрения фирм, активно

инвестирующих в человеческий капитал через всевозможные налоговые льготы.